1 (Sem–4) MAT 1

2025

MATHEMATICS

Paper : MAT0400104

(Real Analysis)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Determine the set

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{x^2+5}{4x+1}<1\right\}$$

$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{x^2+5}{4x+1}<1\right\}$ সংহতিটো নিৰূপণ কৰা।

(b) Write the trichotomy property of real numbers.

বাস্তৱ সংখ্যাৰ ত্ৰিকোট'মি ধৰ্মটো লিখা।

(c) If $A=\{x\in\mathbb{R}:x^2-5x+6<0\}$, find $\sup A$.

$A=\{x\in\mathbb{R}:x^2-5x+6<0\}$ হ'লে $\sup A$ নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Write the first five terms of the sequence $\{x_n\}$, where $x_n = \dfrac{1}{n^2+2}$.

$\{x_n\}$ অনুক্রমটোৰ প্ৰথম পাঁচটা ৰাশি লিখা, য'ত

$$x_n = \frac{1}{n^2+2}$$

(e) Find $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$.

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(f) What is a monotone sequence? Give one example.

একদিষ্ট অণুক্ৰম বুলিলে কি বুজা? এটা উদাহৰণ দিয়া।

(g) State Cauchy's criterion for convergence of a series $\sum_n x_n$.

$\sum_n x_n$ শ্ৰেণীৰ অভিসাৰিতাৰ বাবে ক'চিৰ নিৰ্ণায়ক বা নিয়মটো লিখা।

(h) Give an example of a series in $\mathbb{R}$ which is convergent, but not absolutely convergent.

বাস্তৱ সংখ্যাত এনেকুৱা এটা শ্ৰেণীৰ উদাহৰণ দিয়া, যিটো অভিসাৰী, কিন্তু পৰম অভিসাৰী নহয়।

2. Answer any *six* of the following questions : 2×6=12

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা যি কোনো ছয়টাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) If $a \in \mathbb{R}$ is such that $0 \le a < \varepsilon$ for every $\varepsilon > 0$, then show that $a = 0$.

যদি $a \in \mathbb{R}$ এনেকুৱা যে সকলো $\varepsilon > 0$-ৰ বাবে $0 \le a < \varepsilon$ হয়, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $a = 0$ হ'ব।

(b) State the completeness property of $\mathbb{R}$. Mention one example to demonstrate this property.

বাস্তৱ সংখ্যাৰ completeness property টো লিখা। এই ধৰ্মটো সিদ্ধ হোৱা দেখুৱাবলৈ এটা উদাহৰণ দিয়া।

(c) Show that for all $a \in \mathbb{R}$, $|a|^2 = a^2$.

দেখুওৱা যে সকলো $a \in \mathbb{R}$-ৰ বাবে $|a|^2 = a^2$.

(d) Let A and B be non-empty subsets of $\mathbb{R}$ such that $a \le b$ for all $a \in A$, $b \in B$. Show that $\sup A \le \inf B$.

যদি A আৰু B বাস্তৱ সংখ্যাৰ দুটা এনেকুৱা অৰিক্ত সংহতি যাতে $a \le b$ হয়, সকলো $a \in A$, $b \in B$-ৰ বাবে, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $\sup A \le \inf B$.

(e) Show that the sequence $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ does not converge to any $x \in \mathbb{R}$.

দেখুওৱা যে $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ এই অণুক্ৰমটো কোনো $x \in \mathbb{R}$-লৈ অভিসাৰী নহয়।

(f) Determine the limit of the sequence $\{x_n\}$, where $x_n = \sqrt{n^2 + 5n} - n$.

$\{x_n\}$ অণুক্ৰমটোৰ চৰম মান নিৰ্ণয় কৰা, য'ত

$$x_n = \sqrt{n^2 + 5n} - n$$

(g) Examine the convergence or divergence of the sequence $\left\{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$.

$\left\{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$ এই অণুক্ৰমটো অভিসাৰী নে অপসাৰী পৰীক্ষা কৰা।

(h) If a series $\sum_n x_n$ is convergent, then show that

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

যদি $\sum_n x_n$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

হ'ব।

(i) Show that the series $\sum_n \sin \frac{1}{n}$ is divergent.

দেখুওৱা যে $\sum_n \sin \frac{1}{n}$ শ্ৰেণীটো অপসাৰী।

(j) Use comparison test to show that the series

$$\sum_n \frac{1}{n^2 + a_n}$$

where $\{a_n\}$ is a sequence of strictly positive real numbers, is convergent.

তুলনামূলক পৰীক্ষাৰ সহায়ত দেখুওৱা যে

$$\sum_n \frac{1}{n^2 + a_n}$$

য'ত $\{a_n\}$ এটা তীক্ষ্ণভাৱে ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ অণুক্ৰম, এই শ্ৰেণীটো অভিসাৰী হ'ব।

3. Answer any *four* of the following questions : 5×4=20

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) State and prove the triangle inequality in $\mathbb{R}$.

বাস্তৱ সংখ্যাৰ ত্ৰিভুজ অসমতাটো উল্লেখ কৰি তাৰ প্ৰমাণ দিয়া।

(b) Solve the following inequality :

তলৰ অসমতাটো সমাধান কৰা :

$$|x| + |x+1| < 2$$

(c) Let A and B be bounded non-empty subsets of $\mathbb{R}$. Prove that

ধৰা হ'ল, A আৰু B বাস্তৱ সংখ্যাৰ দুটা পৰিবদ্ধ অৰিক্ত সংহতি। প্ৰমাণ কৰা যে

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

(d) If $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, then show that $\inf S = 0$.

যদি $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $\inf S = 0$ হ'ব।

(e) Let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be real sequences converging to x and y respectively. Show that $\{x_n + y_n\}$ converges to $x + y$.

যদি $\{x_n\}$ আৰু $\{y_n\}$ বাস্তৱ সংখ্যাৰ অণুক্ৰম দুটা যথাক্ৰমে x আৰু y-লৈ অভিসাৰী হয়, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $\{x_n + y_n\}$ অণুক্ৰমটো $x + y$-লৈ অভিসাৰী হ'ব।

(f) Show that a convergent sequence of real numbers is bounded.

দেখুওৱা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ অভিসাৰী অণুক্ৰম এটা পৰিবদ্ধ হয়।

(g) Prove that the p-series $\sum_n \frac{1}{n^p}$ converges for $p > 1$.

প্ৰমাণ কৰা যে $\sum_n \frac{1}{n^p}$ এই p-শ্ৰেণীটো $p > 1$-ৰ বাবে অভিসাৰী হয়।

(h) Let $\{x_n\}$ be a sequence of non-zero real numbers. If there exists $r \in \mathbb{R}$ with $0 < r < 1$ and $k \in \mathbb{N}$ such that

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \le r \text{ for } n \ge k$$

then prove that the series $\sum_n x_n$ is absolutely convergent.

ধৰা হ'ল $\{x_n\}$ অশূন্য বাস্তৱ সংখ্যাৰ এটা অণুক্ৰম। যদি $r \in \mathbb{R}$ এনেকুৱা যাতে $0 < r < 1$ আৰু $k \in \mathbb{N}$-ৰ বাবে

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \le r \text{ সকলো } n \ge k\text{-ৰ বাবে}$$

তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $\sum_n x_n$ শ্ৰেণীটো পৰম অভিসাৰী হ'ব।

4. Answer any *two* of the following questions : 10×2=20

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) State and prove monotone subsequence theorem of real numbers.

বাস্তৱ সংখ্যাৰ একদিষ্ট উপাণুক্ৰম উপপাদ্যটো লিখি প্ৰমাণ কৰা।

(b) Prove Cauchy's criterion for convergence of real sequence.

বাস্তৱ অণুক্ৰমৰ অভিসাৰিতাৰ বাবে ক'চিৰ নিৰ্ণায়ক বা নিয়মটো প্ৰমাণ কৰা।

(c) Show that every contractive sequence is convergent.

দেখুওৱা যে প্ৰতিটো সংকুচিত অণুক্ৰম অভিসাৰী হয়।

(d) Prove that if a series $\sum_n x_n$ is absolutely convergent, then any rearrangement $\sum_k y_k$ of $\sum_n x_n$ is also convergent to the same value.

যদি $\sum_n x_n$ শ্ৰেণীটো পৰম অভিসাৰী হয়, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে শ্ৰেণীটোৰ পদসমূহ সালসলনি কৰি গঠন কৰা যি কোনো এটা শ্ৰেণী $\sum_k y_k$ও একেটা মানলৈকে অভিসাৰী হ'ব।

(e) If the series $\sum_n x_n$ and $\sum_n y_n$ are convergent, then show that $\sum_n (x_n + y_n)$ is also convergent. Does the similar result hold in case of $\sum_n x_n y_n$? Justify your answer.

যদি $\sum_n x_n$ আৰু $\sum_n y_n$ এই শ্ৰেণী দুটা অভিসাৰী হয়, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $\sum_n (x_n + y_n)$ শ্ৰেণীটোও অভিসাৰী হ'ব। $\sum_n x_n y_n$ শ্ৰেণীটোৰ বাবেও এই একেটা কথাই প্ৰযোজ্য হ'বনে? তোমাৰ উত্তৰৰ সত্যতা প্ৰতিপন্ন কৰা।

★★★